逆解析による非線形構成則の同定に関する検討

芥	Л	真	*	長谷川	明	子**	Щ	下		凉***
武	内	邦	文****	李	在	浩****	櫻	井	春	輔*****

On the Possibility of Identifying Nonlinear Constitutive Laws by Back Analysis

by

Shinichi Akutagawa^{*}, Akiko Hasegawa^{**}, Ryo Yamashita^{***}, Kunifumi Takeuchi^{****}, Jaeho Lee^{*****} and Shunsuke Sakurai^{******}

Back analysis of a ground deformational behavior involving nonlinear behavior is discussed. It is of primary importance to make reliable prediction of deformational behavior for shallow tunnels in soft ground. However, predictions made often prove to be incorrect due to complexity of constitutive law and other relevant factors. Back analysis therefore becomes more important, for it may be used to interpret measured displacement to derive non-linear material characteristics. The paper shows some example in which a deformational mechanism is studied in the light of inhomogeneous distribution of Young's module, from which a logic is derived to identify two different types of non-linear constitutive relationships.

Key words : Tunnel, Back analysis, Nonlinear problems, Strain softening behavior

1 緒 言

トンネル,地下大空洞などの掘削問題においては,事 前に入手できる情報の量と質に限界がある。従って、工 事以前に実施する掘削過程の数値シミュレーションは、 あくまでも概略の傾向を掴む程度で終えることが多い.実 際の工事に当たっては掘削に伴って発生する変位, ひず み,応力分布などは計測データの分析を通して評価し,安 全性の確認と設計の妥当性を確認する作業が行われる. このような情報化施工は、トンネルなどの掘削問題におい ては櫻井ら1)によって提唱された逆解析手法以来, さまざ まな種類の問題において開発,適用されてきた.これらの データ分析手法(逆解析手法)は、まず掘削に伴う空洞 周辺の地盤が弾性挙動を呈するとの仮定の元で,その基 本的アプローチが示され、それが次第により複雑な状況 (異方性,弾塑性,一般的非線形性など)に対応できるよ う改良^{2)~6)}されてきた.また,我が国の地質条件が複雑 であること、現場で地山内の応力を求めることが困難で あることから、これらの手法は限界ひずみ⁷⁾を管理基準値 として用いることを前提としたケースが多い. その場合に は, 地盤条件が複雑になってくると, 変位計測時点での ひずみ分布はある程度特定できるものの,以後の掘削に 地山がどのように挙動するかについての"予測能力"につ いては必ずしも十分とはいえない状況があった.

このような背景から、本論文では掘削に対する地山の 変形挙動が非線形性を呈することを前提とした場合に、 変位計測結果を効率よく逆解析するのみではなく,その 結果をさらに踏み込んで分析することによって,地山材 料の力学特性を明らかにすることで,以後の掘削に対す る"予測性能"を向上させることを試みたのでその成果 を報告する.

2 非線形掘削問題の逆解析における成果と課題

2・1 非線形問題における逆解析の一般論

非線形掘削問題における一般的な変位計測結果をFig.1 の実線で示す.このような計測データが得られた場合に は、技術者はかなり高い確度で問題の非線形性を認識す ることとなる.



Fig. 1 Nonlinear displacement profile and trial approach.

Ť	原稿受理 平成 17 年 8 月 9 日 Received Aug. 9, 2005				
*	正 会 員 神戸大学工学部建設学科 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町, Dept. of Architecture and Civil Eng., Kobe Univ., Nada-ku, Kobe,				
	657-8501				
* *	森ビル㈱ 〒106-6155 東京都港区六本木, Mori Build. Corporation, Minato-ku, Tokyo, 106-6155				
* * *	大阪市 〒530-8201 大阪市北区中之島, Osaka City Office, Kita-ku, Osaka, 530-8201				
* * * *	(㈱大林組土木技術本部 〒108-8502 東京都港区港南, Obayashi Corporation, Minato-ku, Tokyo, 108-8502				
* * * * *	神戸大学大学院 〒657-8501 神戸市灘区六甲台町, Graduate Student, Kobe Univ., Nada-ku, Kobe, 657-8501				
* * * * * *	(財)建設工学研究所 〒657-0011 神戸市灘区鶴甲 Construction Eng Res Inst Nada-ku Kobe 657-0011				

このような場合に、第1次近似として弾性モデルを用 いた順解析を行うと、例えば破線1のような結果を得る ことになる.このような近似が十分でないことは明らかで あり、何らかの形で非線形性を考慮した解析手法を用い て破線2,…,Nなどを求めるパラメータスタディを行うこ とは一般的である.これはFig.2に示すような順解析を ベースとしたパラメータスタディであり、条件が整ってい れば良い精度で現場の挙動を説明できることもある.

モデル設定が明確に行える場合などは、このような順 解析をベースとしたアプローチが推奨される.しかし、 多くの場合は、モデル設定のための重要な情報が欠損し ている、あるいは未知数が多いなどのより複雑な状況に なっていることがある.そのような場合には、特定の未 知数を求めるために作られた逆解析プログラムを用いて (Fig.3参照)、計測データからそれらを求める手法がと られる.これらの方法においても、プログラムが扱う主 たる未知数以外にも不明な情報が存在することが多い. そのような場合には、逆解析をベースとしたパラメータ スタディを行うことになる.

2・2 非弾性ひずみの概念を用いる方法

この手法が成功するためには、プロセスの最初に行う モデル設定が重要である.これはFig.2において順解析 をベースにする場合も同様である.しかしながら、我が 国の複雑な地質条件下では、このモデル設定を精度良く 実施することは容易ではない. 著者らはこのような状況 下でも合理的に計測変位からひずみ分布を求めるために, 非弾性ひずみの概念(Fig. 4 参照)を導入した逆解析手 法を開発してきた.^{2)~4)}岩盤の非線形挙動の原因は、塑 性, 亀裂や破砕帯の存在, 材料特性の非均質性など多岐 にわたる. これらの要因を不十分な現地調査のデータか ら事前に特定し精度の高いモデルを構築することは困難 を極める、そこで、直接的原因の詳細を問わず、"最終的 に非線形な挙動を生み出す汎用的メカニズム"を想定し、 意図的に単純化したそのメカニズムを計測変位から同定 することで空洞周辺のひずみ分布を求めることが有効で あることが分かった.この際の"汎用的メカニズム"と



Fig. 2 Parametric study based on forward analysis.



Fig. 3 Parametric study based on back analysis.



(a) An original nonlinear problem.



は"地山が弾性挙動を示すと考えた場合,仮想的な外力 を導入して実際の変位場を再現するならば,地山のどこ にどの程度の仮想外力を導入すればよいか?"という内 容のものである.この考え方は以下のような形式でその 基本概念を説明することができる.

今, 掘削に伴う応力増分, ひずみ増分をそれぞれ $\Delta \sigma$, $\Delta \varepsilon$ とし, 両者をリンクする非線形構成関係を D_{ep} で表す 場合, それらは以下のように表現される.

$$\Delta \sigma = D_{eq} \Delta \varepsilon \tag{1}$$

$$\Delta \sigma = D_e \Delta \varepsilon_e = D_e (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon_p) \tag{2}$$

と言う事もできる. ここで, D_e は弾性応力ーひずみマト リックス, $\Delta \varepsilon_e$ は弾性ひずみ増分, $\Delta \varepsilon_p$ は非弾性ひずみ増 分であり, $\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p$ である.式(1)を用いる限り, 非線形構成則を定義しなければ有限要素解析を定式化で きない.しかし,これは逆解析を構成する上で不便であ るため,非弾性ひずみに関与する項を,次式のように構 成則の記述から抜き出し,仮想の荷重として取り扱うこ とが可能である.

$$\int_{v} B' D_e \Delta \varepsilon dv = R + \int_{v_p} D_e \Delta \varepsilon_p dv \tag{3}$$

ここで、B は変位ーひずみマトリクス、積分領域 v は全 解析領域、 v_p は非弾性挙動を呈している領域を表す.右 辺第 2 項が非弾性ひずみの発生に等価な仮想外力を表 す.この外力は場所ごとに非弾性ひずみの大きさが異な ることから、それらを独立した未知数として取り扱うこ とになる.結果的に、掘削に伴う岩盤の変形問題は、非 弾性なひずみを荷重項として抜き出したために線形化さ れた仮想岩盤に、複数の外力群(実際の外力と非弾性ひ ずみに相当する仮想外力)が作用するという問題に書き 換えられる(Fig.5 参照).すなわち、掘削によって発生 する変位を Δu とすれば、



Fig. 5 Superposition of displacement field for a linearized problem.

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{3+3N} \Delta u_i x_i \tag{4}$$

ここで, N は異なる非弾性ひずみを定義する領域の数を 表す.未知数 x_iについては,最初の3 個が初期応力に関 するもの,残りの 3N が非弾性ひずみである.また,Δu_i は x_iが1の場合の変位ベクトルである.実際の変位場が 複数の変位場の線形足し合わせで表現されることから, 計測変位を用いれば,未知数ベクトルを求めることがで きる.ここでは,未知数の数が計測変位データを上回る ことが多いのでノルム最小化法^{3),8)}を用いている

2・3 逆解析結果の2次処理を含んだ繰り返し計算

ノルム最小化法によって未知数ベクトルを決定できる ため,式(4)から全体の変位場を計算することができる. 変位場,応力場も同様に求めることができるため,この 段階でひずみの管理基準値を利用することもあわせて周 辺地山の安定性を論じることは可能となる.通常はこの 段階で逆解析を終えることも可能であるが,この方法に は改善されるべき点があった.

まず,未知数が多くノルム最小化法を採用しているた め,変位計測箇所付近に集中してひずみの大きな箇所が 現れることである.また,現状の計測変位は完全に再現 しているものの,その情報が岩盤の材料定数と直接結び つかないことから,以後の掘削過程を予測する際に,逆 解析結果を有効に利用することが難しい,ということで ある.このような点を改良するためには,1)計測変位の 再現能力を損なうことなく,2)非弾性挙動が岩盤の物 性に結びつくような仕組みを構築し,3)以後の掘削過程 を予測する際の精度が向上する,ような方法論を構築す ることが必要である.

この目的のためには、当初から複数のモデルを用意し、 それらで逆解析を実施して優劣を比較するなど、さまざ まな方法論が考えられるが、本論文ではノルム最小化法 で求められた逆解析結果を2次的に処理することによっ て、上記の目的を達成することを試みた.具体的には、 「非弾性挙動が発生した原因は弾性係数の不均一性が原 因である」との立場を取ることとし、「岩盤の不均一な弾 性係数分布を正しく把握すれば、計測変位を再現できる」 という考え方を採用することとした.

Fig. 6において, 掘削に伴い応力・ひずみ関係が実線

のルートをたどって現状位置(○印)に到達したとする. この時,逆解析の中では弾性係数として E を用いている ため,実際の変形を再現するために仮想荷重(非弾性ひ ずみ)が存在する状態になっている.この時,その場所 における弾性係数を Eeq に変更すれば,その低減された 弾性係数によって,仮想荷重の助けを借りなくても計測 変位を再現することが可能となる.

この考え方に基づいた場合,弾性係数を各要素iごと に定義するとして,弾性係数低減率*A*_iを次式のように最 大せん断ひずみ比で定義するものと仮定した.¹⁰⁾

$$A_{i} = \frac{E_{eq}}{E} = \frac{\Delta \varepsilon_{e}}{\Delta \varepsilon_{e} + \Delta \varepsilon_{p}} = \frac{\Delta \gamma_{\max}^{i} e}{\Delta \gamma_{\max}^{i}}$$
(5)

ここで、 $\Delta \gamma_{\text{maxe}}^{i}$ は i 番目要素の弾性最大せん断ひずみ、 $\Delta \gamma_{\text{max}}^{i}$ は i 番目要素の全最大せん断ひずみである.式 (5) による弾性係数の更新は1回で最終値を得ることができ ないため、繰り返し計算によって更新量が十分小さくな るようにした.解が収束した段階では例えば Fig. 7 に示 すように非均質な弾性係数分布(唯一解として求められ るが正解である保証は無い)が得られることになる.こ のプログラムのフローを Fig. 8 に示す.



Fig. 6 Definition of equivalent Young's modulus.



Nonlinear strain in homogeneous ground •Fictitious forces •Homogeneous ground

- Quick computation
- •Material model NOT identified



NO nonlinear strain in inhomogeneous ground •No fictitious forces •Inhomogeneous E distribution •Bit of iteration •Material model identified



3 逆解析結果から材料の力学特性を求める方法1

3・1 非線形弾性構成則を定義する方法

Fig. 8の繰り返し型逆解析が終了した時点において は、計測された変位場がほぼ100% 再現されているため、 その時のひずみ分布などから現状の安全性判定などは可 能となる.しかし、ここでさらに踏み込んで材料の力学 特性に関する情報を抽出することができれば、以後の予 測解析の精度がさらに向上することが期待できる.その 方法の第1として、逆解析の結果もとめられた非均質な 弾性係数の分布から非弾性構成則(ここでは Duncan-Chang モデル⁹を採用; Fig. 9参照)を求める方法¹⁰ がある.

ここでは Duncan-Chang モデルにおける応力・ひずみ 関係がせん断応力 τ ・せん断ひずみ γ にも適用できると して,両者の関係を以下のように記述するものとする (Fig.9参照).



Fig. 8 Flowchart of the iterative back analysis.



Fig. 9 Shear stress versus shear strain relationship derived from Duncan-Chang model.

このとき、せん断剛性 G は以下のように表される.

$$G = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = \frac{b'}{\left(b' + a'\gamma\right)^2} \tag{7}$$

逆解析の結果として得られている応力,ひずみのデータ を利用して,そこに式(6)で定義される構成式を回帰的 にフィッティングさせることで,"非均質な弾性係数分布 を生み出すことになった構成則そのもの"を得ることが できる.勿論,対象とする岩盤の領域は広範であるから, その中に数種類の非線形弾性構成則の存在を定義するこ とも,可能であるが,本論文では最も基本的なスタンス として,岩盤の変形挙動を説明する唯一の構成則として 式(6)の係数を求めることを試みた.

3・2 大空洞掘削問題における適用例

Fig. 10 に本手法を適用した地下発電所大空洞^{12)~14)} における変位計測結果を示す.

この地下空洞は,土被りが約 300m あり, C_H 級の良好 な岩盤中に,スパン 24m,高さ 47m,長さ 135m 規模の 弾頭型空洞として掘削されたものである.^{12)~14)}

Fig. 11 に逆解析で用いた有限要素メッシュを示す. 空洞掘削により影響を受ける範囲を想定して,図の太線



Fig. 10 Results of displacement measurement.



Fig. 11 Finite element mesh used for back analysis.

枠内において非弾性な挙動が現れると想定した.これは, 未知数の数を最小限に抑えるための方策であって,用い るコンピュータの容量が十分であれば,全領域で非弾性 挙動が現れうると想定して差し支えない.岩盤の既知物 性,初期応力の計測結果などは文献^{10,11}に詳述している のでここでは,提案する手法の要点だけを述べる.まず, 掘削のある段階において入手した計測変位を使って非均 質な弾性係数分布を求めたとする.例えば,Bench 3 が 終了した時点での変位から逆解析を実施すると Fig. 12 (a) のようなひずみ分布を得る.

この時, 逆解析結果から非弾性構成則を求めることな く, 最終段階のひずみ分布を予測すると Fig. 12 (b)のよ うになる. 一方で, Fig. 12 (a)で得られている逆解析結果 を用いて式 (6)を決定する場合,まず,せん断剛性と最大 せん断ひずみの関係 (Fig. 13) が得られる. 最小二乗法に より求められた回帰曲線は図中に示すとおりである.

ここで同定された構成則を用いて最終段階の予測を行





(a) Result from back analysis





(d) Most likely strain distribution

(c) Prediction with regression analysis.

Fig. 12 Back analysis at the end of Bench 3 excavation.

at the final stage.

analysis



Fig. 13 Identification of a Duncan-Chang model by least square regression.

うと Fig. 12 (c)のようなひずみ分布を得る. この図では 最終段階において空洞右側壁下部周辺にひずみの大きな 領域が出現することが予測されている. これは最終的な 段階ですべての計測変位から求められた最も信頼度の高 いひずみ分布図 (Fig. 12 (d)) にも共通するものである. このような"予言"は構成則を定義しない場合の予測結 果には無いものであり,提案する手法の利点である.

Fig. 14 に Bench 5 の掘削終了後のデータで同様の比較を行った結果を示す. Bench 3 の場合と同様に, 逆解析結果から構成則を定義した上で最終段階を予測するほうが精度が高いことが分かる.

4 逆解析結果から材料の力学特性を求める方法 2

4・1 ひずみ軟化特性を表現する方法論

Fig. 8 で示されたフローの逆解析が終了した時点での 応力,ひずみの情報からどのような構成則を導き出すか については幾つもの選択肢があり,唯一解はない.どの ような変形メカニズムを想定して構成則を定義するかは ユーザーに委ねられる部分が大きい.ここでは,前章の 非線形弾性構成則とは少し視点を変え,ひずみ軟化挙動 を示す変形メカニズムを想定した例¹⁵⁾を示す.

Fig. 15 に土被りが浅い NATM トンネル周辺に発生す る典型的なひずみ分布を示す.このように、トンネル側 壁部から地表面にかけて、せん断ひずみの卓越する領域



Fig. 14 Prediction of strain distribution at the final stage without (left) and with (right) the identified constitutive law at Bench 5 excavation. Grey scale is the same as for Fig. 12.



Fig. 15 Typical strain distribution for a shallow NATM tunnel. (This figure is shown only to show location of strain concentration.)

が発生する都市 NATM 特有の変形モードを表現するために,著者らは異方性損傷パラメータ m⁵と潜在的すべり面における Coulomb の摩擦則の適用を組み合わせた ひずみ軟化型モデルを適用してきた.¹⁶このモデルにおいては Fig. 16 のように異方性損傷パラメータ m をせん断 ひずみの増加にあわせて減少させるとともに,潜在的す べり面(最小主応力作用方向から 45± ¢/2 度: Fig. 17 参 照)において Coulomb の摩擦則を適用し,強度パラメー タ c, φをひずみの増加とともに残留値まで減少させる手 法をとっている.

4・2 ひずみ軟化特性の同定を試みるための問題設定

本節ではここで紹介しているひずみ軟化モデルで仮の 計測データを作成するものとする.これを仮想計測変位 として,提案する非均質逆解析手法で逆解析を実施し, その結果から,どの程度ひずみ軟化特性が同定できるか を検証する.

数値計算例に用いた有限要素メッシュを Fig. 18 に示 す.トンネル径 D は 10m とし,土被り H は 1D とした. 左右の鉛直境界は水平変位を,下部境界は鉛直変位を拘 束した.Table 1 に示した入力データを用いて,仮の計測 データを作成した.計測データを定義した場所は Fig. 18 に図示している.計測ライン 6,7 は同一箇所にあるが, 片方は伸縮変位,もう一方は回転変位を計測することを 意味する.その他のラインにおいては伸縮変位を計測す るものとする.

4・3 ひずみ分布の同定

Fig. 18 に図示されている変位計測箇所のデータをす べて用いて逆解析を行った.比較のため,非弾性ひずみ



Fig. 16 Anisotropy parameter m versus shear strain.



Fig. 17 Conjugate slip planes and reduction of strength parameters.



Fig. 18 Finite element mesh and measurement configuration.

Table 1 Input parameters used to create artificial measurement data.

Parameter	Value				
Young's modulus (MPa)	1000				
Poisson's ratio	0.3				
Unit weight (MN/m ³)	0.026				
Friction angle (degrees)	30				
Cohesion	0.1 (initial)				
(MPa)	0.01 (residual)				
$\Delta \gamma$	0.001				

を求めるだけで終えた逆解析結果を合わせて Fig. 19 に 示す.

ひずみ軟化モデルから得られた"真のひずみ分布 (Fig.19a)"に対して,非弾性ひずみを求めただけで終わ ったもの (Fig. 19 b) よりも,それから非均質弾性係数分 布を求めたもの (Fig. 19 c) の方が精度良くひずみ分布を 同定できていると言える.

4・4 ひずみ軟化特性の同定

逆解析の結果得られている応力状態を用いて, Fig. 20 にモールの応力円の中心をσ座標に, 半径をτ座標にとっ た点をプロットした.この図におけるグレースケールは その応力ポイントにおいて発生していた最大せん断ひ ずみの大きさを表している.この状態において, すべて



(a) Forward analysis (b) Back analysis with (c) Back analysis with nonlinear strain only nonlinear strain + E-distribution

Fig. 19 Results of the strain softening analysis and back analyses.

の応力ポイントがそれを超えないような破壊基準線を設定 するとすれば、順解析を行った際の初期の破壊基準(軟 化特性が現れる前のもの)に近いものを得ることができ る.そのままでは軟化特性を求めることはできないが、 Fig. 20をよく観察すると、ひずみが小さい時の応力(薄 い色)は比較的高い位置にあり、反対にひずみが大きく なると(濃い色)応力ポイントは次第に下方に下がる傾 向が見受けられる.この傾向こそが軟化特性であると考 えられるため、ひずみの大きさごと(図のグレースケー ルが同一のポイント群ごと)に破壊基準線を設定し、そ の際の粘着力の値を最大せん断ひずみとの関係でプロッ トしたものが Fig. 21 の実線である.

淡色のポイントはひずみ軟化解析によって仮の計測デー タを作成した際にトンネルスプリングライン付近のある 要素における c, γの関係を表したものである. 破線はそ の平均を表す. ひずみ軟化解析では応力が破壊基準に達 した要素から順に c を低下させるので c と γの関係には 多少ばらつきがあるが, Fig. 20 から抽出した c と γの関 係 (材料の軟化特性を定義する関係) はこれらの平均値 にほぼ一致することが分かる. このように軟化特性を特 定できれば, それを用いて十分な精度で予測解析を行う ことができる.





σ (MPa)

Fig. 20 State of stress in back analysis with gray scale.



Fig. 21 Identified reduction of cohesion versus shear strain.

5 おわりに

本論文では、非線形挙動を呈する大小地下空洞の掘削 問題において、効率よく現状のひずみ分布を求めるとと もに、残された掘削過程における変形挙動をできるだけ 高い精度で予測するための逆解析の考え方について述べ た. 我が国の地質構造は複雑であるため, Fig. 22 にあ るように、まず最初は一般的な非弾性ひずみによって複 雑な変位場を再現し、次に、その情報を非均質な弾性係 数分布に変換する方法を取った. さらに、その段階で得 られている応力分布、ひずみ分布に含まれている潜在的 な情報を抽出することにより、岩盤材料の非線形構成則 を同定することが可能であることを,2つの異なるモデ ルを用いて示した.この3段階のアプローチは複雑な変 位場を分析し、その中から将来予測も可能にする情報を 抽出する一つの手法としてある程度のポテンシャルを有 していると考えており、今後も多様なケーススタディに 応用してゆく予定である.

参考文献

- S. Sakurai and K. Takeuchi, "Back analysis of displacement measurements in tunnelling", Proceedings of the JSCE, Vol.337, pp.137-145 (1983).
- S. Sakurai, I. Kawashima, A. Saragai and S. Akutagawa, "Back analysis of the non-elastic deformational behavior of ground materials", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.505/III-29, pp.133-140 (1994).
- S. Sakurai, S. Akutagawa and O. Tokudome, "Back analysis of non-elastic strains based on minimum norm solution", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.517/III-31, pp.197-202 (1995).
- S. Akutagawa, M. Kakihara, M. Takeyama and S. Sakurai, "Back analysis of excavation process of underground powerhouse cavern considering slip deformation of rock joints",



Fig. 22 New concept of back analysis for nonlinear problems.

Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.589/III-42, pp.335-348 (1998).

- 5) M. Okuda, T. Abe and S. Sakurai, "A non-linear back-analysis procedure for shallow tunnels excavated in unconsolidated grounds", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.638/III-49, pp.383-388 (1999).
- S. Sakurai, "Back analysis in observational methods", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.652/III-51, pp.1-10 (2000).
- S. Sakurai, "An evaluation technique of displacement measurements in tunnels", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.317, pp.93-100 (1982).
- Z. Gao and T. Mura, "Nonelastic strains in solids-An inverse characterization from measured boundary data", Int. J. Engineering Science, Vol.30, No.1, pp.55-68 (1992).
- J. M. Duncan and C. Y. Chang, "Nonlinear analysis of stress and strain in soils", Proc. ASCE, Vol.96, SM5, pp.1629-1653 (1970).
- K. Takeuchi, T. Shimura, S. Akutagawa and S. Sakurai, "Back analysis to model out rock mass behavior due to inhomogeneity and its application to cavern construction", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.659/III-52, pp.241-252 (2000).
- 11) K. Takeuchi, T. Shimura, S. Akutagawa and S. Sakurai,

"Development of a new prediction method of rock mass stability based on the results of the back analysis during excavation", Journal of Geotechnical Engineering, JSCE, Vol.701/III-58, pp.253-262 (2002).

- M. Harada, T. Katayama and A. Yada, "Design and construction of the underground cavern in Ohkochi hydro power station", Electric Power Civil Engineering, No.230, pp.46-57 (1991).
- 13) T. Katayama, A. Yada, Y. Kiyaji and T. Fukuoka, "Excavation of huge underground cavern of shell head shape-Ohkochi hydro power station of Kansai Electric Power Co.", Tunnels and Underground, Vol.22, No.10, pp.7-14 (1991).
- 14) T. Katayama, A. Yada and Y. Hirakawa, "Observational excavation method of the underground cavern in Ohkochi hydro power station", Electric Power Civil Engineering, No.237, pp.97-107(1992).
- 15) S. Akutagawa, A. Hasegawa and R. Yamashita, "An example of back analysis of a deformational behavior", Journal of Tunnel Engineering, JSCE, Vol.12, pp.143-148 (2002).
- 16) T. Kitagawa, N. Nakayama, T. Matsunaga, S. Akutagawa and S. Konishi, "Applicability of the strain softening model for the research of the surface settlement", Journal of Tunnel Engineering, JSCE, Vol.14, pp.53-60 (2004).