

# Drucker-Prager 弾塑性体の漸近解を使用した 最大摩擦せん断応力破壊規準によるせん断破壊の考察<sup>†</sup>

矢 富 盟 祥\* 新 保 泰 輝\*\*

## On a Shear Failure by the Maximum Frictional Shear Stress Criteria Using an Asymptotic Solution for the Drucker-Prager Elastic-Plastic Material

by

Chikayoshi YATOMI\* and Taiki SHIMBO\*\*

A new fracture criterion of the shear failure for the geomaterials is presented which enables to predict a straight extension of a crack in the elastic plastic materials under the compressive loads. It is an application of the Coulomb fracture criterion to a crack extension criterion called “The maximum frictional shear stress criterion”.

We examine the criterion by using both the singular and the constant terms in the asymptotic expansion of the crack tip stress fields for a linear hardening Drucker-Prager elastic plastic material. As a result, we find that the confining pressure, the frictional coefficient of the crack surface, the small hardening parameter, and the dilatancy effect is the lowering of the extensive hoop stress causing the crack kink, which contribute the frictional shear stress extending a crack straight to maximum.

**Key words :** Shear failure, Maximum frictional shear stress criteria, Asymptotic analysis, Drucker-Prager elastic-plastic material Mode II, Compressive loading

### 1 緒 言

圧縮荷重下にある岩盤や地盤材料の円柱供試体による3軸圧縮試験を行うと、き裂や滑り面による破壊様式は、側圧が小さい場合は、最大圧縮応力と平行な方向に割れる縦割れ破壊（スプリット破壊）また、側圧がある程度大きくなると、斜め方向に直進的に進展するせん断破壊に大別される。ただ、前者に相当する1軸的な圧縮荷重を作用させた場合、岩石やモルタルなどのぜい性材料では、荷重を作用さす供試体上下端面の摩擦を極力無くした場合にのみ縦割れ破壊となり、摩擦がある程度以上存在するとせん断破壊する。また、地盤材料である粘土や砂質土においては、このような1軸的な圧縮荷重を作用させた場合でも、縦割れ破壊はほとんど観察できず、せん断破壊となる。この縦割れ破壊は、平板供試体中央に斜めき裂を挿入して上下から圧縮すると、き裂面が滑るために、き裂の両先端近傍に非常に大きな引張応力が発生し、その箇所からウイングき裂と呼ばれる折れ曲がりき裂が発生する。この折れ曲がりき裂が、最大圧縮方向に進展する実験事実に基づいて説明される。すなわち、物体の中には、無数の微小き裂が存在し、大きな圧縮荷重が作用すると、ウイングき裂が多数発生するが、これが縦方向に連なり、マクロには、これが最終的には縦割れき裂になると解釈される。<sup>1)</sup>一方、せん断型の破壊は、

地滑りや地震の主要因である活断層の滑り現象に密接に関連した非常に重要な破壊形態であるにもかかわらず、この破壊形態になる破壊規準に関しては、いまだ未解決問題なのである。<sup>2)</sup>地震の活断層生成メカニズム解明を意図して、S. Melin<sup>3)</sup>は、“When does a crack grow under mode II conditions ?”と題した論文を報告しており、線形等方弾性体を仮定し、折れ曲がり後のき裂面に対して等方圧縮応力とせん断応力の比を用い、 $K_{II}$ 最大破壊規準を使用した議論を行っている。また、著者らの1人は、線形等方弾性体において、最大エネルギー解放率破壊規準を使用し、側圧が小さな場合は、ウイングき裂が発生し、側圧がある程度大きくなるとせん断破壊になる事を報告した。<sup>4)</sup>しかしながら、岩盤や地盤材料のき裂先端近傍は、非常に応力が大きくなっているため、もはや線形弾性体とは仮定できず、弾塑性体状態になっていると考えるべきであろう。特に、地盤材料では、滑り面（き裂面）が発生していない初期状態から、物体全体が弾塑性体状態になっていると考えられる場合が多い。

そこで、著者らの1人は、近年、弾塑性体にも適用可能な、せん断破壊に関する破壊規準として、「最大摩擦せん断応力破壊規準」を提案し、<sup>5)</sup>この破壊規準を、硬化の無いDrucker-Prager弾完全塑性体モデルを用い、有限要素解析により、その有用性の考察を行った。

<sup>†</sup> 原稿受理 平成20年4月21日 Received Apr. 21, 2008 ©2008 The Society of Materials Science, Japan

\* 正 会 員 金沢大学大学院自然科学研究科 〒920-1192 金沢市角間町, Graduate School of Natural Sci. & Tech., Kanazawa Univ., kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

\*\* 金沢大学大学院自然科学研究科環境科学専攻 〒920-1192 金沢市角間町, Division of Environmental Sci. & Eng., Graduate School of Natural Sci. & Tech., Kanazawa Univ., kakuma-machi, kanazawa, 920-1192

本報告では、既報<sup>6)</sup>で求めた線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型のき裂先端近傍特異応力に、漸近解の第 2 項である均一圧縮応力を付加した応力場をもとに、最大摩擦せん断応力破壊規準を適用し、せん断破壊の発生に関する検証を行った。

## 2 最大摩擦せん断応力破壊規準

「最大摩擦せん断応力破壊規準」とは、端的に言えば、き裂先端近傍に、その近傍での応力を用いて、周知の「Coulomb の破壊規準」を用いた「き裂進展の破壊規準」である。文献<sup>5)</sup>では、この規準に関して簡単に述べただけだったので、ここでその規準に関して詳述する。

Coulomb の破壊規準は、もともと物体のマクロな破壊条件を、主応力関係、 $\sigma_1 = f(\sigma_2, \sigma_3)$ , ( $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ ) で求めるのが目的であり、き裂面の存在しない物体に仮想的なき裂による破壊を、経験的に想定し提案されたものである。Coulomb の破壊規準では、せん断破壊は  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  軸で、直線で表せる。したがって、Coulomb の破壊規準は、「き裂がいつ、どの方向に進展するかを判断する規準」であるき裂進展破壊規準とは無関係なものである。Griffith<sup>7)</sup>は、上記の主応力関係で表されるマクロな破壊規準を求めるために、2 軸の主応力場におかれた無限板内の扁平な楕円き裂を解析し、破壊は、その周上にある縁応力が最大になる点で発生するという仮定の下で、 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  軸で放物線形の破壊条件を得た。後に、McClintock and Walsh は、圧縮荷重下では、き裂は閉じ、摩擦力が生じるとし、最終的に、Coulomb の破壊規準である直線形の主応力関係となる事を示した。<sup>8)</sup>

以下に、Fig. 1 のように、き裂面の先端を原点とした極座標表示による応力を用いて「最大摩擦せん断応力破壊規準」に関して詳述する。

下記式 (1) で定義される、き裂先端からき裂の長さに比較して微小な距離  $r$  にある角度  $\theta$  に関する「摩擦せん断応力  $\tau_f$  (Frictional shear stress)」の最大値が、せん断破壊強度  $\tau_{fc}$  に達した時、き裂は、その先端から、 $r$  が増加する方向に進展すると仮定する。

$$\tau_f = \begin{cases} |\sigma_{r\theta}| + \hat{\mu}\sigma_\theta & \text{with } \sigma_\theta < 0 \\ \sigma_{r\theta} & \text{with } \sigma_\theta > 0 \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\tau_f$  を摩擦せん断応力と呼び、 $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_{r\theta}$  は、それぞれ、き裂先端近傍の周応力およびせん断応力である。ただし、式 (1) で、 $\tau_f < 0$  となる場合は、 $\tau_f = 0$  とする。

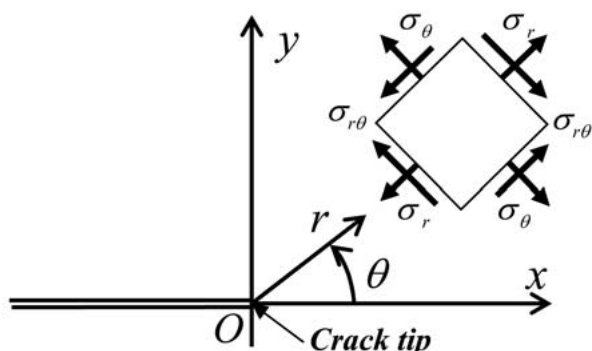


Fig. 1 The Polar coordinate at the crack tip.

また、 $\hat{\mu}$  は内部摩擦係数である。ここで、内部摩擦係数と呼んだのは、Coulomb の破壊規準では、き裂の存在は仮想的に想定されたものであり、本来のき裂面の動摩擦係数ではないからである。

式 (1) の  $\tau_f$  の定義に使用した極座標応力による表現を、主応力による表現に置き換え、それらの座標変換の角度に関する最大条件から、Coulomb の破壊規準である主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  軸での直線で表された破壊条件が得られる。この時、主応力のひとつが引張応力になった場合の破壊条件は、色々考えられているが、ここでは、議論を簡単にするため、直応力のひとつである周応力  $\sigma_\theta$  が、引張最大になる角度  $\theta$  である限界値  $\sigma_{\theta c}$  に達した時に引張破壊すると考え、き裂は、その先端から周応力最大方向に進展すると考える。この条件は最大周応力破壊規準と言われる。なお本報告で考える岩盤材料や地盤材料では、 $\tau_{fc} \gg \sigma_{\theta c}$  と仮定する。注意したい事は、圧縮荷重下でのき裂においては、き裂面と一致する角度  $\theta = \pi$  での直応力である半径応力  $\sigma_r$  が、引張最大になる場合が多いが、この場合、き裂は、厳密に考えると、周応力  $\sigma_\theta$  の場合と異なり、応力が無限大になるき裂先端から進展するようにはならないため、ある角度  $\theta$  の最大引張周応力  $\sigma_\theta$  より、最大引張半径応力  $\sigma_r$  が大きくても、周応力により引張破壊が生じると考える。

## 3 構成式と力の釣合い式

本論文では、弾性体の部分は、線形等方弾性体、塑性部分は、簡単のため、圧力に線形に依存する降伏関数を持つ速度型の線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体を考える。また変形は微小であるとし、慣性項や物体力のない準静的な平面ひずみ場における静止き裂を仮定して議論する。

なお、既報<sup>6)</sup>で、この場合の、構成式、力の釣合い式、ひずみ変位関係などを述べ、き裂先端近傍応力場の特異応力場の漸近解析を報告したので、本論文では、紙面の都合もあり、その内容の詳細は割愛する。

Drucker-Prager 弾塑性体に基づく線形硬化する等方弾塑性体の降伏関数は、

$$f = \sqrt{J_2} - \beta p - (H\bar{e}^p + \tau_y) = 0, \quad (2)$$

である。ここに  $J_2$  は偏差応力  $\mathbf{S}$  の第 2 不変量であり、 $p$  は平均応力 (圧力) である。これらは、それぞれ次式で定義されている。

$$J_2 := \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} := \boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}, \quad p := -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3)$$

ここで中付き ( $\cdot$ ) はテンソルの内積であり、 $\mathbf{1}$  は 2 階の恒等テンソルである。また、平均応力  $p$  にマイナスが付いているのは圧縮力を正とするためである。 $\beta (> 0)$  は弾塑性体の降伏値が偏差応力のみでなく圧力にも線形に依存する事を示す物質定数であり、この  $\beta$  により、塑性せん断ひずみにより、塑性体積ひずみが生じる。 $\tau_y$  はせん断降伏応力である。 $H$  は硬化係数であり、ここでは正の定数とする。 $\bar{e}^p$  は相当偏差塑性ひずみであり、次式で定義されている。

$$\bar{e}^p := \int \dot{e}^p dt = \int \sqrt{2\dot{\mathbf{e}}^p \cdot \dot{\mathbf{e}}^p} dt. \quad (4)$$

ここで,  $t$  は, 時間とともに単調増加する負荷パラメータであり, 上付き  $(\cdot)$  は, この  $t$  に関する微分を表す.  $\mathbf{e}^p$  は偏差塑性ひずみであり,

$$\mathbf{e}^p := \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^p \mathbf{1}, \quad (5)$$

である. 流れ則は関連流れ則に従うとすると, 塑性ひずみ速度は次式で与えられる.

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (6)$$

ここで,  $\lambda$  は塑性乗数である. 塑性変形時に応力が常に降伏曲面上にあるためのコンシステンシー条件は,

$$\dot{f} = 0, \quad (7)$$

である. ここで, 応力速度と弾性ひずみ速度の関係は, 弾性構成テンソル  $\mathbf{C}^e$  を用いて以下で表される.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e, \\ \mathbf{C}^e &:= \frac{E}{(1+\nu)} \left\{ \mathbf{I} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

ここで,  $E$  は弾性係数,  $\nu$  はポアソン比,  $\mathbf{I}$  は 4 階の恒等テンソルである.

今, 全ひずみ速度は弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度の和であるから, 降伏関数(2), 流れ則(6), コンシステンシー条件(7), 構成式(8)を用いて, 物体の境界で与えられた応力が比例負荷で与えられたと仮定し, 負荷は常に塑性負荷状態であるとする, 全ひずみは, 応力を用いて,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \boldsymbol{\sigma} - \nu \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1} + \Lambda \mathbf{Q} \right\}, \quad (9)$$

となる. また, 上式  $\mathbf{Q}$  は,

$$\mathbf{Q} := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{S}}{2\sqrt{J_2}} + \frac{\beta}{3} \mathbf{1}, \quad (10)$$

であり,  $\Lambda$  は式(3), 式(10)より以下で定義される.

$$\Lambda := \frac{1}{h} \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{h} (\sqrt{J_2} - \beta p) \quad (11)$$

ここで,  $h := H/E$  ( $> 0$ ) とおいた. 塑性負荷状態では, 常に  $\Lambda > 0$  である. また,  $J_2 = 0$  となる場合, 式(9)の構成式が定義できないため, 漸近解を求める際には  $J_2 > 0$  とした.

#### 4 き裂先端近傍の応力場

本論文では, き裂先端近傍は, き裂先端近傍のみが塑性負荷状態にある小規模降伏状態を仮定し, その領域内の応力を下記のように漸近展開第 2 項までを用いて議論する.

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta) = \boldsymbol{\sigma}^1(r, \theta) + \boldsymbol{\sigma}^2(\theta). \quad (12)$$

ここで, 既報<sup>6)</sup>で求めたように, 第 1 項はき裂先端からの距離  $r$  に対して,  $1/\sqrt{r}$  の特異性を持つ項であり, 第 2 項は, 物体境界から与えられる応力による距離  $r$  によらない均一応力項である. この第 2 項は, 直交デカルト座標  $(x, y)$  で表せば, 定数となるが, Fig. 1 に示す極座標表示すると, 境界から与えられた応力によって異なる

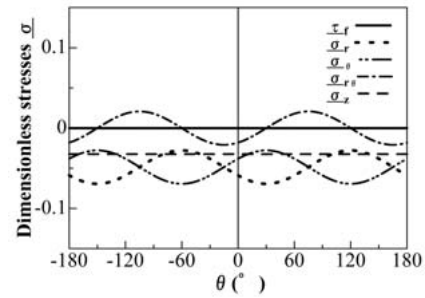


Fig. 2 Angular variation of dimensionless stresses ( $\sigma_3/\sigma_1 = 0.4$ ).

Fig. 2 に示すような  $\theta$  の関数となる事に注意したい. Fig. 2 の詳細は後述する.

式(12)で, 第 2 項の均一項を用いた理由は, 第 1 項の特異項だけでは, き裂先端周りに, 反時計回り方向にせん断変形させた場合, そのき裂先端近傍の応力のうち, 特に, 周応力や半径応力の大きな引張応力が発生するため, 破壊は, 引張破壊となり, せん断破壊が生じない事になるからである. 従って, 例えば, この物体内のき裂に, 周囲から均一圧縮応力を作用させる事により, き裂面の滑りを小さくする事により, 上記の引張応力を, 圧縮応力に変える事が可能になると考えたからである. 無限板中央にある斜めき裂に 1 軸引張応力を作用させた時, 特異応力だけではなく均一応力である, T-Stress を考えれば, 最大周応力破壊規準により, き裂進展角度に関する実験事実を良く説明できたのと同じような理由である.

#### 4・1 Drucker-Prager 弾塑性体の応力拡大係数

既報<sup>6)</sup>の結果により, 特異応力場は次のように表せた.

$$\boldsymbol{\sigma}^1(r, \theta) = \frac{H}{\sqrt{r}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\theta). \quad (13)$$

ここで, 上付き  $(-)$  は, 無次元化された角度のみの関数である事を示す. また,  $\bar{r} := r/L$  であり,  $L$  は長さの次元を持つ物理量である. 今,

$$\sqrt{L} := \frac{K_{II}^p}{H\sqrt{2\pi}}, \quad (14)$$

と定義すると,

$$\boldsymbol{\sigma}^1(r, \theta) = \frac{K_{II}^p}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\theta) \quad (15)$$

となる. ここに,  $K_{II}^p$  は「応力 × 長さ<sup>1/2</sup>」の次元を持つ物理量であり, 物体の形状や境界条件によって決まる線

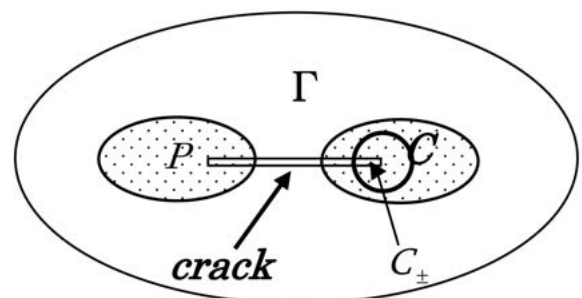


Fig. 3 Integral path of the path independent integrals.

形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型の応力拡大係数である。

今, Fig. 3 において, き裂先端近傍の周囲全体  $P$  が塑性負荷状態にある小規模降伏状態を仮定して, 領域  $P$  から遠く離れた場所では, 線形等方弾性状態であると仮定する. この時,  $J$  積分は, 構成式が線形等方弾性体や式 (9) で与えられた弾塑性体の構成式である場合には, き裂先端の一方のみを含む物体内の任意の領域の境界および, その領域内のき裂面上下を含んだ経路であれば, その値は, 経路独立である事が証明できる.

そこで, 今, Fig. 3 のように, 塑性負荷状態にある領域  $P$  内で, き裂の右先端に中心を持つ半径  $\varepsilon$  のき裂先端近傍の円  $C$  とその円内にあるき裂の上下面  $C_{\pm}$  上を積分経路とした  $J$  積分を考える. この時, Drucker-Prager 弾塑性体におけるモード II 型の場合は, き裂面上下  $C_{\pm}$  のき裂先端近傍に  $1/\sqrt{r}$  の特異性を持つ周応力が発生し,<sup>6)</sup>  $C_{\pm}$  上の  $J$  積分は, 表面力の釣合いを考慮すると,

$$\int_{C_{\pm}} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} d\Gamma = \int_{C_{\pm}} \frac{K_{II}^p}{2\pi H \varepsilon} (\bar{\sigma}_{r\theta}[\bar{u}_r] + \bar{\sigma}_{\theta}[\bar{u}_{\theta}]) d\varepsilon, \quad (16)$$

となる. 以後,  $[A]$  はき裂上下面での物理量  $A$  の差  $[A] := A(\pi) - A(-\pi)$  である. 上式は, 形式上, 可積分ではないが, き裂面上下で  $[u_{\theta}] = 0$ , および  $\bar{\sigma}_{r\theta}(\pm\pi) = 0$  であるから, 結局, 上式の積分は 0 となる. また, 圧縮荷重下で摩擦が働く場合には, 均一応力項の積分も考慮に入れる必要がある. この時, この円  $C$  内に含まれるき裂面上下  $C_{\pm}$  を経路に含む  $J$  積分の値は, その経路独立性から,  $\varepsilon \rightarrow 0$  とした時の値に等しいから, き裂面上下  $C_{\pm}$  の積分の値は 0 となり, 円  $C$  上の  $J$  積分の値は,

$$J = \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \left( W \cos \theta - \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\theta = \frac{K_{II}^p}{2\pi H} I, \quad (17)$$

となる. ここに,  $W := \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} / 2$  であり,  $\mathbf{t}$  は表面力,  $I$  は以下で定義される定数である.

$$I := \int_{-\pi}^{\pi} \bar{W} \cos \theta + 2 \sin \theta (\bar{u}'_r \bar{\sigma}_r + \bar{u}'_{\theta} \bar{\sigma}_{r\theta} + \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{u}_r - \bar{\sigma}_r \bar{u}_{\theta}) - (\bar{\sigma}_r \bar{u}_r + \bar{\sigma}_{r\theta} \bar{u}_{\theta}) \cos \theta d\theta. \quad (18)$$

式 (18) で, 使用されている記号の詳細は文献<sup>6)</sup>を参照されたい. ここで,  $J$  積分はその経路内に, 2 個以上のき裂先端が含まれれば, もはやその経路独立性は失われる事に注意したい. 従って,  $J$  積分に, き裂面上下の積分を含めても, 上記のき裂の右先端だけを含んだ塑性負荷領域  $P$  内の円  $C$  と  $C_{\pm}$  上での積分値と, 遠方にある線形等方弾性体の経路  $\Gamma$  の積分値とは, 同じにはならない. 一方, 著者の一人が提案した  $E$  積分は,<sup>9), 10)</sup> 式 (9) で与えられた弾塑性体の構成式の場合も経路独立であり,  $J$  積分に比べ, 経路独立性が成立する適用範囲が広く,<sup>11)</sup> その経路内に含まれるき裂先端の数には, 無関係に経路独立であり, 特に, 経路内のき裂先端が 1 個で, き裂が直進する場合には  $J$  積分の式と一致する事が証明されている.<sup>12)</sup> したがって, この  $E$  積分を使用すれば, 式 (17) の関係は, き裂面上下の積分を含めた, き裂から遠く離れた線形等方弾性体の  $E$  積分の値と等しい値となる. 以上より, 小規模降伏状態を仮定すれば, 平面ひずみ条件下にある圧

縮荷重下での線形等方弾性体のモード II 型の応力拡大係数  $K_{II}^e$  を用いて, 式 (15) は,

$$K_{II}^p = \sqrt{\frac{2\pi h(1-\nu^2)}{I}} K_{II}^e, \quad (19)$$

と表せる. Fig. 4 の  $K_{II}^p/K_{II}^e$  の図より, この値は,  $h$  および  $\beta$  の単調増加関数である事が分かる.

#### 4・2 漸近展開均一応力解と線形等方弾性体の応力拡大係数

今, Fig. 5 に示すように無限板中央に斜めき裂が存在し, その上下無限遠から, 最大圧縮主応力  $\sigma_1$ , 左右無限遠から最小圧縮主応力  $\sigma_3$  が比例的に作用しているとし, 最大圧縮主応力  $\sigma_1$  と, き裂のなす角を  $\gamma$  とする. また, Fig. 1 のような極座標を考えると, 極座標表示での均一応力は下記のように表せる.

$$\begin{aligned} \sigma_r^{\infty}(\theta) &= \sigma_x^{\infty} \cos^2 \theta + \sigma_y^{\infty} \sin^2 \theta + \sigma_{xy}^{\infty} \sin 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{\infty}(\theta) &= \sigma_x^{\infty} \sin^2 \theta + \sigma_y^{\infty} \cos^2 \theta - \sigma_{xy}^{\infty} \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{\infty}(\theta) &= (\sigma_y^{\infty} - \sigma_x^{\infty}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy}^{\infty} \cos 2\theta \end{aligned} \quad (20)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\infty} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(2\gamma), \\ \sigma_y^{\infty} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos(2\gamma), \\ \sigma_{xy}^{\infty} &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin(2\gamma), \end{aligned} \quad (21)$$

であり, 肩付き  $\infty$  は無限遠から与えられる応力を示す.  $\sigma_x^{\infty}$ ,  $\sigma_y^{\infty}$ ,  $\sigma_{xy}^{\infty}$  等は, Fig. 5 のように, き裂面の方向に  $x$

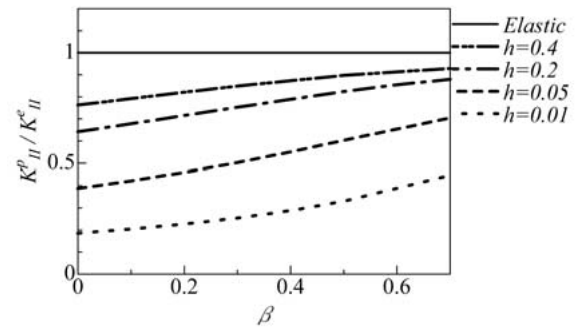


Fig. 4 Variation of  $K_{II}^p/K_{II}^e$ .

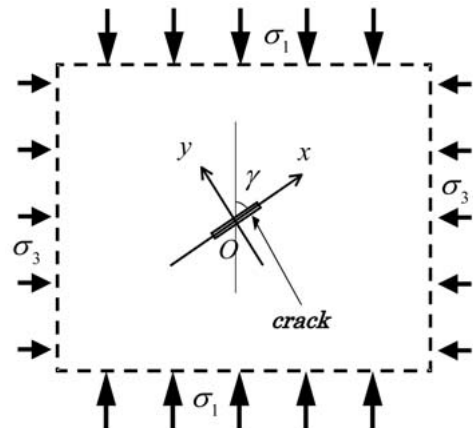


Fig. 5 Boundary conditions of an infinite region.

座標, 垂直方向に  $y$  座標をとった時の無限遠から与えられた  $x, y$  成分の応力である. この時, 式 (19) の  $K_{II}^e$  は, 次式で与えられる.

$$K_{II}^e := |\tau| \sqrt{\pi a}. \quad (22)$$

上式で,  $\tau$  の絶対値を取ったのは, 既報<sup>6)</sup>で得た特異項の支配方程式において, 負の実数倍をしたものは解とはならないためである.  $a$  はき裂長さ  $\ell$  の半分である.  $\tau$  は物体境界の境界条件により得られる値であり, き裂面の動摩擦係数を  $\mu$  とすると, 以下のように表される.

$$\begin{aligned} & \text{if } \sigma_y^\infty < 0, \text{ in addition, } |\sigma_{xy}^\infty| + \mu \sigma_y^\infty \geq 0 \\ & \text{then } \begin{cases} \tau = \sigma_{xy}^\infty + \mu \sigma_y^\infty \cdots \cdots \text{when } \sigma_{xy}^\infty > 0 \\ \tau = \sigma_{xy}^\infty - \mu \sigma_y^\infty \cdots \cdots \text{when } \sigma_{xy}^\infty < 0 \end{cases}, \text{ and} \\ & \text{if } \sigma_y^\infty \geq 0 \text{ or } \sigma_y^\infty < 0 \text{ in addition, } |\sigma_{xy}^\infty| + \mu \sigma_y^\infty < 0 \\ & \text{then } \tau = 0, \text{ and the closed crack surface does not slide.} \end{aligned} \quad (23)$$

### 5 解析結果

本章では, 線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型におけるき裂先端近傍応力場の漸近展開第 2 項まで考慮した解析結果, および式 (1) に示す摩擦せん断応力の結果を示し, 最大摩擦せん断応力破壊規準および最大周応力破壊規準によるき裂進展に関する考察を行う.

本解析では, ポアソン比を  $\nu = 1/3$ , 最大主応力を  $\sigma_1 = -1.0 \text{ MPa}$  とした. 最大主応力とき裂のなす角度  $\gamma = 30^\circ$  ( $=\pi/6$ : Fig. 5 参照) とし, き裂先端からの距離  $r$  はき裂長さ  $\ell$  に対し,  $r/\ell = 0.001$  と仮定した. また, 関連流れ則に従う Drucker-Prager 弾塑性体では, パラメータ  $\beta$  はダイラタンシー係数であると同時に, 内部摩擦係数の意味をも持つため, 未知パラメータの数を減らす目的で, 内部摩擦係数  $\hat{\mu} = \beta$  とした. この時,  $\sigma_3/\sigma_1$ ,  $\mu$ ,  $h$ ,  $\beta$  を変化させた応力分布を示す. 解析に用いたパラメータの詳細はそれぞれの図に記す. なお, 全ての応力分布は, 上記パラメータの効果を分かりやすくするため, 式 (12) の応力を,

$$\underline{\sigma}(r, \theta) := \frac{\sigma(r, \theta)}{|\sigma_r(r, -\pi)|}, \quad (24)$$

のように無次元化した応力を記している. ここで, 上式右辺の分母は, 次式の線形等方弾性体の場合の  $\sigma_r(r, -\pi)$  の特異項と均一項の和である.

$$\sigma_r(r, -\pi) = \frac{K_{II}^e}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_r(-\pi) + \sigma_r^\infty(-\pi). \quad (25)$$

ここで,  $K_{II}^e$  は, 式 (22) において, 1 軸圧縮応力で  $\mu = 0$  の場合とした応力拡大係数である. また, 式 (25) において, 線形等方弾性体の場合の特異応力解と一致するように,  $\bar{\sigma}_r(-\pi) = -2$  としている. 式 (24) の無次元化において,  $\theta = -\pi$  での半径方向の応力を使用したのは, 特異項の解析において, それを境界条件の基準値として与えたからである. 詳しくは, 既報<sup>6)</sup>を参照されたい.

図中  $\underline{\tau}_f$  は摩擦せん断応力に対して同様の無次元化を行ったものである. また, 横軸は慣例に従い,  $(^\circ)$  としている.

今, 比較のために, Fig. 6 (a)~(c) に  $\hat{\mu} = 0.5$  とし, き裂面の動摩擦係数  $\mu$  は, 比較的大きい  $0.7$  とした場合の, 主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  を変化させた線形等方弾性体での解析結果を示す. この図をみると, 当然の結果であるが, 主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  が増加し, 側圧が大きくなると, 全ての直応力成分の分布が圧縮側に低下している (ただし, Fig. 6 (a) は, (b), (c) と縦座標が異なる事に注意.).

(a)  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.0$  や (b)  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.2$  の場合は, 式 (23) より, 特異項の大きさを示す応力拡大係数  $K_{II}^e$  は, き裂面の動摩擦係数  $\mu$  が大きいほど小さくなるが主応力差が大きいくほど大きいため, この例では, 均一圧縮応力項に比べると特異項の影響が大きく, 周応力  $\underline{\sigma}_\theta$  は, 摩擦せん断応力の最大値に比べ, 約  $70^\circ$  付近で, かなり大きい引張応力で最大となっている. したがって, この場合, 最大周応力破壊規準により, き裂先端から最大圧縮主応力が与えられている方向に約  $70^\circ$  方向折れ曲がった引張り裂が発生する.

しかし, 側圧がさらに大きくなり  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.25$  となると, 応力拡大係数  $K_{II}^e$  が小さくなり, 特異項に比較し均一圧縮応力項の影響が大きくなり, 最大周応力  $\underline{\sigma}_\theta$  は, ほぼ 0 となり, 摩擦せん断応力の最大値が  $\theta \cong 0^\circ$  で最大に達している. したがって, この場合, 最大摩擦せん断応力破壊規準に従い, き裂は, 直進するせん断破壊になる. 側圧がさらに大きくなり応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  が大きくなると, 主応力差が小さくなるため, 応力拡大係数  $K_{II}^e$  が小さくなり, 均一圧縮応力項の影響が大きくなるため, 最大周応力  $\underline{\sigma}_\theta$  を含めた直応力は, 全て圧縮応力となる. 主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.4$  の場合 (Fig. 2 参照) は,  $K_{II}^e = 0$  となり, き裂面の滑らない均一圧縮応力場になる. 以上の事から, 式 (23) より, 構成式とは無関係に, 主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  やき

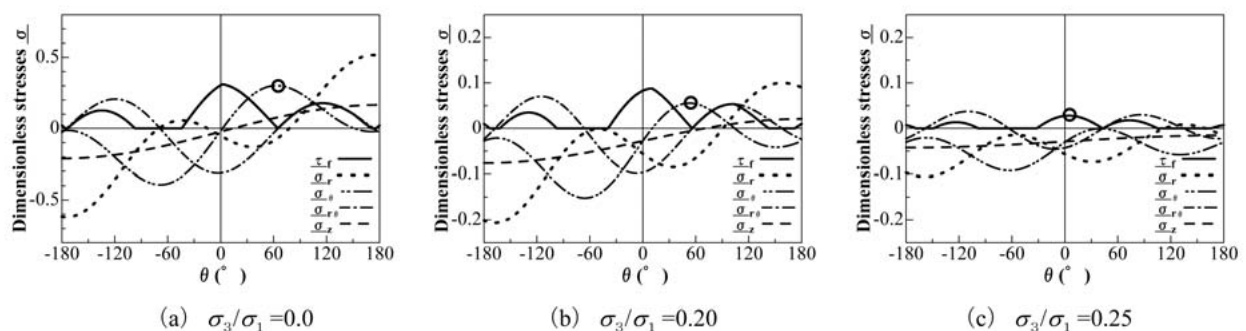


Fig. 6 Angular variation of dimensionless stresses in elastic materials ( $\hat{\mu} = 0.5$ ,  $\mu = 0.7$ ).

裂面の摩擦  $\mu$  が大きくなれば、式 (22) の応力拡大係数が小さくなるので、相対的に均一項の影響が大きくなり、また、き裂面の滑り量は小さくなるため、 $\theta$  が  $60^\circ \sim 70^\circ$  付近の引張周応力は小さくなる事が分かる。

以上の事を考慮し、Drucker-Prager 弾塑性体の応力分布の結果は、主応力比の効果の検証のため、Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9 に、それぞれ、主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.0, 0.2, 0.4$  の場合の結果を示す。ダイヤタンスーの効果の検証のために、 $\beta$  は、全ての場合において、0.3, 0.5 および 0.7 と変化させた場合を記す。Fig. 7 では、 $h$  の効果を検

証するために、 $h = 0.2$  および 0.01 の場合の比較を示す図を記す。Fig. 8 と Fig. 9 は、 $h = 0.01$  の場合におけるき裂面の動摩擦係数をそれぞれ、 $\mu = 0.0$  と 0.7、また  $\mu = 0.0$  と 0.3 とした図を記す。後者の主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.4$  の場合は、 $\mu$  が約 0.47 以上になると均一応力場になるため、大きい方の  $\mu$  の値を 0.3 とした。

なお、以後、分かり易くするため、Fig. 6 にあるように、周応力  $\underline{\sigma}_\theta$  が、摩擦せん断応力の最大値に比べ、比較的大きい値で最大となっている角度が存在する場合は、最大周応力破壊規準により、その角度の方向に引張り裂が発

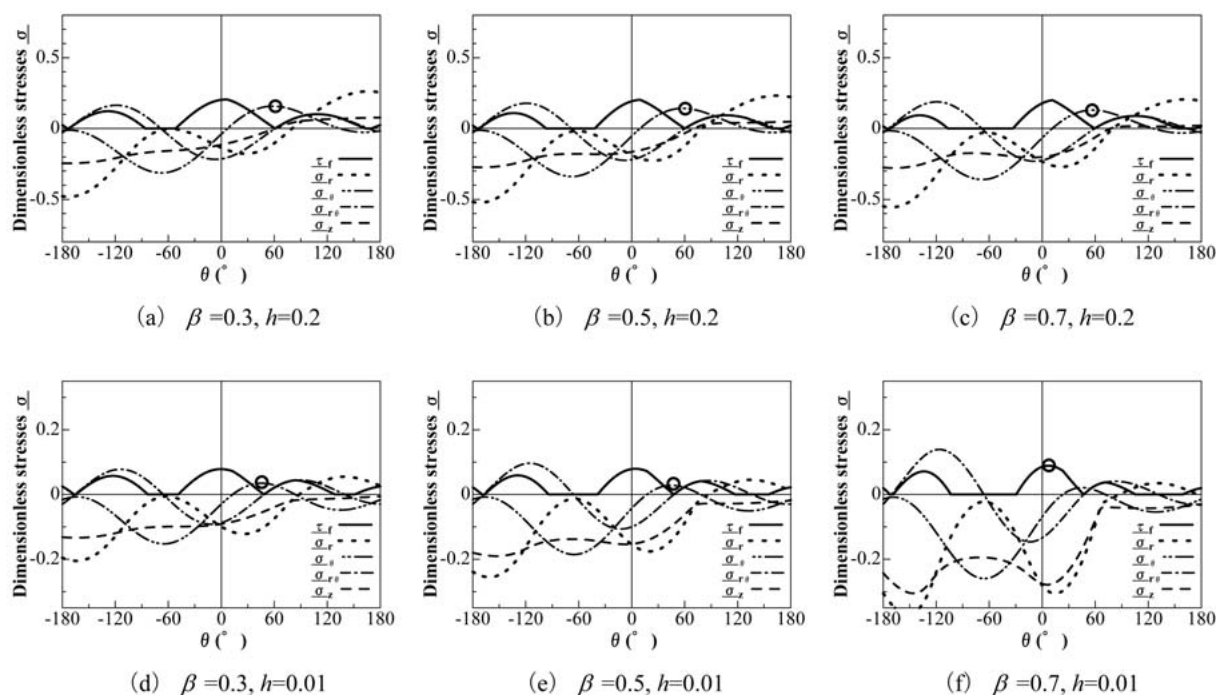


Fig. 7 Angular variation of dimensionless stresses ( $\sigma_3/\sigma_1 = 0.0, \mu = 0.7$ ).

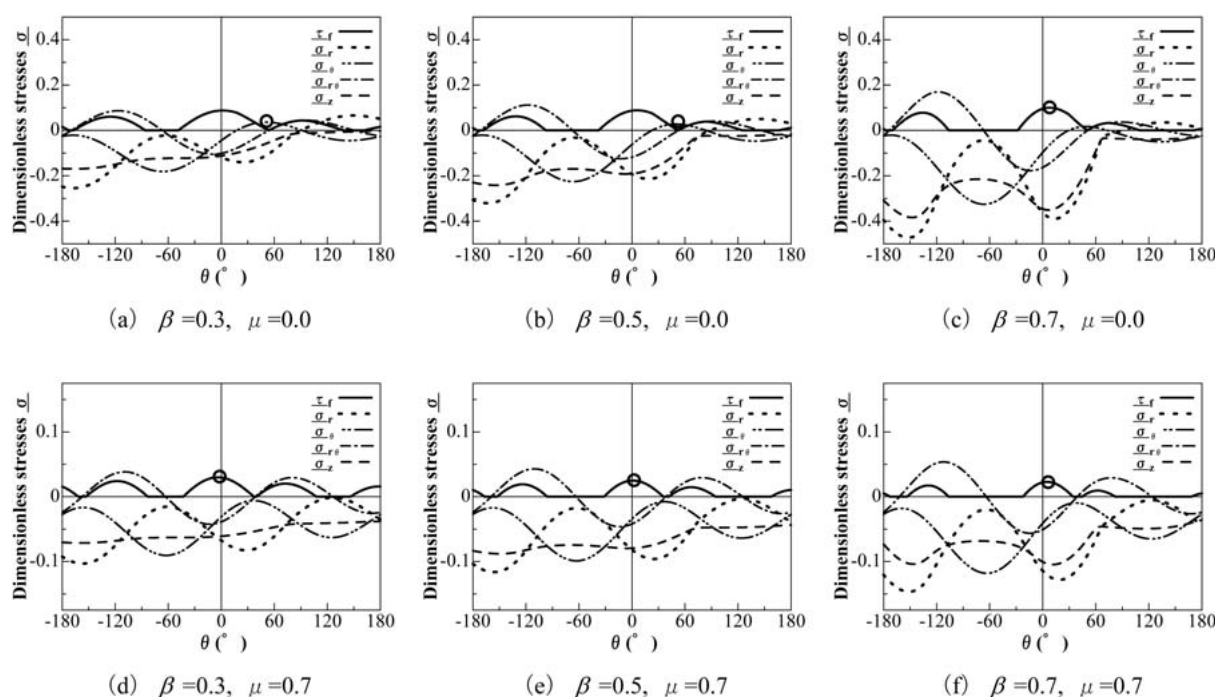
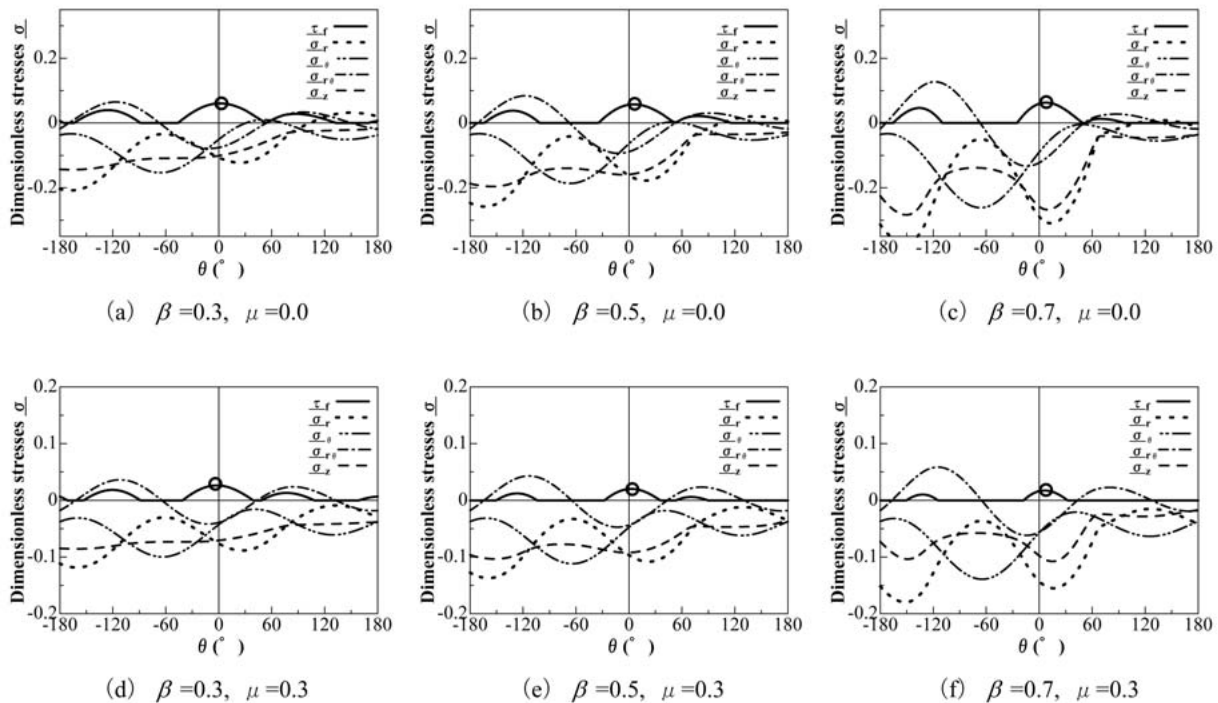


Fig. 8 Angular variation of dimensionless stresses ( $\sigma_3/\sigma_1 = 0.2, h = 0.01$ ).

Fig. 9 Angular variation of dimensionless stresses ( $\sigma_3/\sigma_1 = 0.4$ ,  $h = 0.01$ ).

生するとし、最大周応力  $\sigma_{\theta, \text{Max}}$  を示す点に○を付記する。一方、最大周応力  $\sigma_{\theta, \text{Max}}$  が摩擦せん断応力に比べ、非常に小さくなり最大摩擦せん断応力破壊規準に従い、き裂が直進進展となるせん断き裂になる場合には、その最大摩擦せん断応力  $\tau_{f, \text{Max}}$  を示す点に○を付記する。ただし、この  $\tau_{f, \text{Max}}$  が、正確に  $\theta = 0^\circ$  で生じなくても、0 に非常に近い値であれば、せん断破壊が生じるとみなす。

Fig. 7 (a)～(f) は、主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.0$  である 1 軸圧縮応力の場合であり、Fig. 7 (a)～(e) は、最大引張応力破壊規準に従う引張破壊となる事が分かる。Fig. 7 (f) の  $\beta = 0.7$  で、 $h = 0.01$  の場合には、最大周応力が、最大摩擦せん断応力に比べ非常に小さな引張応力になっているため、この場合には、せん断破壊の可能性がある事が分かる。 $h$  の応力の値に与える効果に関しては、既報<sup>9)</sup>の特異応力の無次元応力  $\bar{\sigma}(r, \theta)$  の応力成分の変化は小さいが、 $h$  が小さい方が、Fig. 4 から  $K_{II}^0$  が小さくなるため、特異応力の絶対値が小さくなり、 $h = 0.2$  の Fig. 7 (a), (b), (c) の場合に比べ、対応する  $h = 0.01$  の Fig. 7 (d), (e), (f) の  $h$  が小さい方が、全ての無次元化された応力成分の絶対値が小さくなる事が分かる (Fig. 7 (a)～(c) と (d)～(f) では、両者の座標値が異なる事に注意)。物理的には、応力が大きくなると、Drucker-Prager 弾塑性体の剛性が線形等方弾性体のそれに比べ小さくなった事による、塑性構成式の特性である。

そこで、Fig. 8 には、 $h = 0.01$  とした、主応力比を  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.2$  を与えた場合で、 $\mu = 0.0$  および  $0.7$  の場合を図示した。Fig. 8 の (a), (b) は、引張破壊であるが、(c)～(f) は、せん断破壊が生じると言える。一方、Fig. 7 と Fig. 8 より、 $\beta$  が大きくなると、 $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_x$  の直応力の値は、全て、圧縮応力側に下がっている。Fig. 4 の

$K_{II}^0$  の値は、 $\beta$  の緩やかな単調増加関数であるが、 $h$  の場合と異なり、既報<sup>9)</sup>の特異応力の無次元応力  $\bar{\sigma}(r, \theta)$  の直応力成分が、き裂先端近傍のせん断応力によるダイヤタンスー効果による体積膨張を抑制するための圧縮応力が発生し、この応力が、特に引張応力であった、全ての直応力成分を圧縮側に下げる効果を与えるためである。

Fig. 9 の主応力比  $\sigma_3/\sigma_1 = 0.4$  の場合は、線形等方弾塑性体の例で詳述したように、いずれも直応力  $\sigma_\theta$  は全て圧縮か、最大周応力は非常に小さい値 (Fig. 9 (a)) であり、どの場合も最大摩擦せん断応力破壊規準によるせん断破壊となる。前述したように、約  $\mu = 0.47$  以上になると、 $K_{II}^0 = 0$  となり、き裂面は滑らず均一応力状態となる。

なお以上の議論では、 $r/\ell$  を 0.001 としたが、 $r/\ell$  が大きい場合には、自明的に特異項に対する均一応力の影響は大きくなり、 $r/\ell$  が大きい程、特異項による引張応力が低下し、均一応力項により応力は圧縮側に变化する。

したがって、最大引張周応力規準と同じように、応力による破壊規準を採用する場合には、この  $r/\ell$  の大きさは、対象とする物質の特性や構成物質の大きさなどを十分に検討する必要がある。

なお、本論文では、せん断破壊の発生を説明するために、最大摩擦せん断応力破壊規準を提案したが、他に、せん断破壊の発生を説明できそうなものとして、最大せん断応力破壊規準、ないし、き裂折れ曲がり瞬間後の  $k_{II}^0$  最大破壊規準が考えられる。しかしながら、前者は、Fig. 7～9 をみれば、最大せん断応力は、 $\theta = 0^\circ$  近傍でない方向、時には  $\theta = 0^\circ$  から非常に離れた方向でも生じているから、明確なせん断破壊は説明がつかない事、また同じ大きさのせん断応力が作用している面に対して、圧縮応力が大きいほど破壊しにくいと考えるのが妥当である

ためせん断破壊の規準として適当ではない。また後者のき裂折れ曲がり瞬間後の  $k_{II}^p$  最大破壊規準は、この  $k_{II}^p$  を解析的に求める事が非常に難しいため実用的ではない。

## 6 結 言

現在まで、圧縮応力場にあるモードⅡ型の状態にあるき裂が、もとの方向のまま直進進展するせん断破壊が明瞭に説明可能な破壊規準は提案されていなかった。そこで、本論文では、「最大摩擦せん断応力破壊規準」という Coulomb の破壊規準を、き裂の進展破壊規準として採用した新しい破壊規準を提案した。本論文では、線形硬化する Drucker-Prager 弾塑性体モデルにおいて、き裂先端近傍応力の漸近解の特異項と均一応力項を採用し、その破壊規準の有効性の検証を行った。その結果以下の事が判明した。

(1) き裂面に対して傾いた方向から、1 軸圧縮応力を与えると、き裂面には滑りが発生し、それにより、 $\theta$  が  $60^\circ \sim 70^\circ$  付近に大きな引張周応力が発生し、き裂は、引張周応力により、折れ曲がりき裂となる。この時、主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  やき裂面の動摩擦係数  $\mu$  が大きくなれば、応力拡大係数が小さくなるので、相対的に均一圧縮応力項の影響が大きくなり、また、き裂面の滑り量は小さくなるため、引張周応力は小さくなる。この効果により、主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  やき裂面の動摩擦係数  $\mu$  が大きくなると、 $\theta$  の  $0^\circ$  近傍の摩擦せん断応力が最大となり、せん断破壊が発生する。ただし、この主応力比  $\sigma_3/\sigma_1$  やき裂面の摩擦  $\mu$  の効果は、境界条件に関連するものであり、直接的には、構成式とは無関係である。

(2) ヤング係数  $E$  が固定され、硬化係数  $H$  が小さい、すなわち、 $h = H/E$  が小さくなる場合は、弾塑性応力拡大係数  $K_{II}^p$  が小さくなるため、特異応力の絶対値が小さくなり、引張周応力  $\sigma_\theta$  が小さくなるため、引張破壊は抑制され、せん断破壊が生じやすくなる。

(3)  $\beta$  が大きくなると、き裂先端近傍のせん断応力によるダイラタンシー効果の体積膨張を抑制するための圧縮応力が発生し、この応力が、特に引張応力であった全ての直応力成分を圧縮側に下げる効果となり、引張破壊は、抑制され、せん断破壊が生じやすくなる。

以上より、 $h$  が小さく  $\beta$ 、 $\mu$ 、 $\sigma_3/\sigma_1$  等が適当に大きい場合には、引張破壊は生じなくなり、「最大摩擦せん断応力破壊規準」により、せん断破壊の発生が説明可能となる。

## 参 考 文 献

- 1) S. N. Nasser and H. Horii, "Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst", Journal of Geophysical Research, Vol.87, pp.6805-6821 (1982).
- 2) C. H. Scholz, "The mechanics of earthquakes and faulting", pp.1-461 (1991) Cambridge University Press.
- 3) S. Melin, "When does a crack grow under mode II conditions?", International Journal of fracture, Vol.30, pp.103-114 (1986).
- 4) C. Yatomi and Y. Suzuki, "Finite element analysis of the energy release rate by using the E-integral under the compressive loads", Journals of the Japan Society of Civil Engineers, No.612, pp.251-263 (1999).
- 5) Y. Suzuki, T. Ohkuma and C. Yatomi, "A study of maximum frictional shear fracture criterion for a crack extension in geomaterials under the compressive loads", Journal of Applied Mechanics, JSCE, Vol.10, pp.331-342 (2007).
- 6) T. Shimbo and C. Yatomi, "Asymptotic analysis for mode II loading of a hardening Drucker-Prager material", Journal of the Society of Materials Science, Japan, Vol.57, No.9, pp.936-943 (2008).
- 7) A. A. Griffith, "The theory of rupture". In : Proceedings of the First International Congress on Applied Mechanics, Delft, pp.55-63 (1924).
- 8) J. C. Jaeger and N. G. W. Cook, "Fundamentals of rock mechanics, pp.267-269 (1969) Methuen & Co LTD..
- 9) C. Yatomi, "The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth", International Journal of Solids and Structures, Vol.19, pp.183-187(1983).
- 10) C. Yatomi and K. Hashimoto, "On the energy release rate by the path-independent E-integral and J-integral for quasi-static crack growth", edited by K. Ohtsuka Theoretical Studies on Fracture Mechanics in Japan, Hiroshima Denki Institute of Technology, pp.87-98 (1998).
- 11) Y. Suzuki and C. Yatomi, "Finite element analysis of the E-integral for a frictional crack under the several loading histories", Journal of Applied Mechanics, JSCE, Vol.1, pp.45-53 (1998).
- 12) C. Yatomi, "New expression for the energy release rate and its applications: simplified formula under multiaxial loadings" Journal of the Society of Materials Science, Japan, Vol.35, No.394, pp.767-771 (1986).